

出題のねらい(数学)

第1問

二次方程式と絶対値を伴う一次方程式からなる連立方程式に関する問題。二次方程式の解と絶対値に付随する場合分けを組み合わせることで、論理性と総合的な理解を問う。

第2問

図形と計量に関する出題。三角比や余弦定理、面積の計算などを組み合わせることで、図形についての総合的な理解を問う。

第3問

二次関数の最大・最小に関する出題。絶対値の場合分けとグラフの移動を組み合わせることで、総合的な論理力と数学的な発想力を問う。

第4問

確率・期待値に関する理解を確認するとともに、事象についての場合分けを含めた論理性を問う。

解答例

第1問

まず $|y-x|=1$ について、以下のような場合分けを行う。

(i) : $y \geq x$ のとき,

$$y-x=1 \text{ より, } y=x+1$$

(ii) : $y < x$ のとき,

$$-(y-x)=1 \text{ より, } y=x-1$$

これを $y=x^2-1$ に代入すると,

(i) : $y \geq x$ のとき, $x^2-1=x+1$ より, $x^2-x-2=(x+1)(x-2)=0$. これより,

$$(x,y)=(2,3), (-1,0)$$

(ii) : $y < x$ のとき, $x^2-1=x-1$ より, $x^2-x=x(x-1)=0$. これより,

$$(x,y)=(0,-1), (1,0)$$

以上をまとめると,

$$(x,y)=(-1,0), (0,-1), (1,0), (2,3)$$

を得る.

第2問

$\triangle ABC$ は下図のように描ける. 図において, $\triangle ABC$, $\triangle BCD$ および $\triangle DAB$ はそれぞれ, $AB = AC$, $BC = BD$, $DA = DB$ を満たす 2 等辺三角形である.

問題 1

まず, $BC = BD = AD = 1$ なので

$$CD = AC - AD = x - 1$$

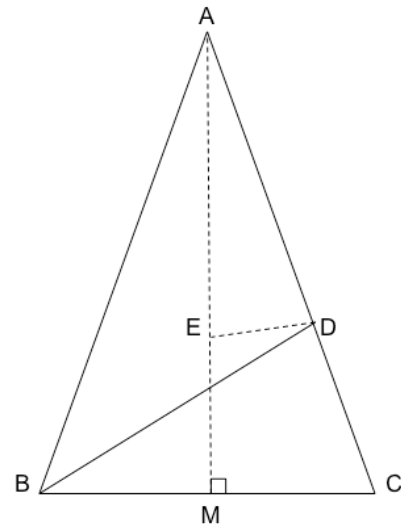
次に, $\triangle ABC$ と $\triangle BCD$ は, 対応する 2 つの角がそれぞれ等しいのは明らかなので, 相似である. 従って, $AB : BC = BC : CD$ が成り立つ. すなわち

$$x : 1 = 1 : x - 1$$

x は, 次の 2 次方程式の正の実数解である.

$$x^2 - x - 1 = 0$$

この方程式を解いて, $x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ を得る.



問題 2

$\triangle ABM$ において, 余弦の定義から

$$\cos 72^\circ = \frac{1/2}{x} = \frac{1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

問題 3

円 A に内接する正 20 角形の面積を S_1 , $\triangle ADE$ の面積を S_2 とする. $\triangle ADE$ は $AD = AE$ の二等辺三角形であり, $\angle DAE = 18^\circ$ である. 三角比の関係から $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ$ であることと問題 2 より $\cos 72^\circ = (\sqrt{5} - 1)/4$ であることに注意すると, $\triangle ADE$ の面積は次のように求まる.

$$S_2 = \frac{1}{2} AD \cdot AE \cdot \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{8}$$

一方, 円 A に内接する正 20 角形の面積は, $\triangle ADE$ の面積の 20 倍である. 従って

$$S_1 = 20 \cdot S_2 = \frac{5(\sqrt{5} - 1)}{2}$$

第3問

問題1

$k=0$ のとき, $y=f(x)$ ($0 \leq x \leq 6$) のグラフを考える. まず $|x^2 - 4x| = |x(x-4)|$ に注意する. $y=f(x)$ の関数のグラフを描くために絶対値の定義に基づいて, x について次の場合分けを行う.

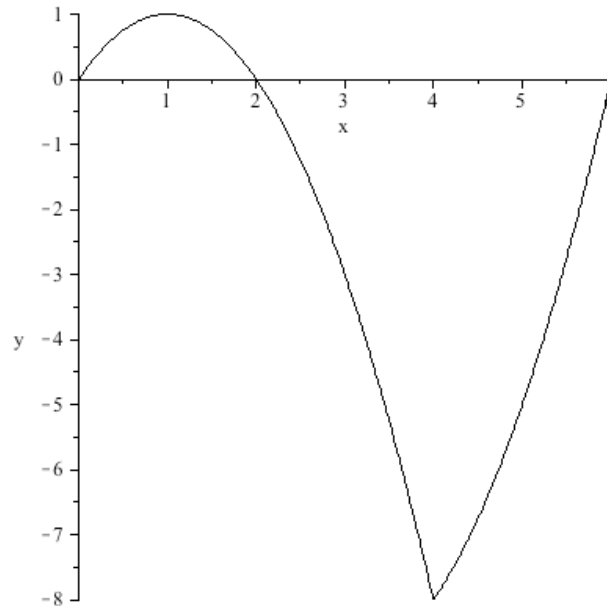
(i) : $0 \leq x \leq 4$ のとき

$$f(x) = -x(x-4) - 2x = -x(x-2) \quad (1)$$

(ii) : $4 < x \leq 6$ のとき

$$f(x) = x(x-4) - 2x = x(x-6) \quad (2)$$

以上から $0 \leq x \leq 4$ のときは, (1)式を満たす $y=f(x)$ のグラフを描き, $4 < x \leq 6$ のときは, (2)式を満たす $y=f(x)$ のグラフを描けばよい. 従って, $y=f(x)$ ($0 \leq x \leq 6$) のグラフは下図のようになる. このグラフから最大値は $f(1)=1$ であり, 最小値は $f(4)=-8$ である.



問題 2

$y = |x^2 - 4x| - 2x + k$ ($0 \leq x \leq 6$) のグラフは、問題 1 のグラフを y 軸方向に k 平行移動したものである。 $f(x) = |x^2 - 4x| - 2x + k$ とする。定義域上の全ての x に対して、 $f(x) \geq 0$ を満たすのは、 $f(x)$ の最小値が 0 以上であるときに限る。従って

$$f(4) = -8 + k \geq 0$$

求める k の範囲は $k \geq 8$ である。

問題 3

$f(x)$ の最大値と最小値の積が負の数になるのは、 $f(x)$ の最大値が正の値をとり、かつ $f(x)$ の最小値が負の値をとるときに限る。すなわち、次の k についての不等式が同時に成り立つときである。

$$\begin{cases} f(1) = 1 + k > 0 \\ f(4) = -8 + k < 0 \end{cases}$$

これを解いて、

$$-1 < k < 8$$

を得る。

第4問

問題1

Aが3連勝の確率は、 $(\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64}$ 、Bが3連勝する確率は、 $(\frac{1}{4})^3 = \frac{1}{64}$ 、3回で終わる確率は、 $\frac{27}{64} + \frac{1}{64} = \frac{7}{16}$ となる。

問題2

(1) 3回目までAが2勝1敗で、4回目にAが勝つ。

$${}_3C_2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right) \times \frac{3}{4} = 3 \times \frac{27}{256} = \frac{81}{256}$$

(2) 3回目までBが2勝1敗で、4回目にBが勝つ。

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{4} = 3 \times \frac{3}{256} = \frac{9}{256}$$

結果、(1)と(2)より $\frac{81}{256} + \frac{9}{256} = \frac{45}{128}$ を得る。

問題3

4回目までAが2勝2敗の確率は、

$${}_4C_2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 6 \times \frac{9}{256} = \frac{27}{128}$$

このうち5回目でAが勝つのは、 $\frac{27}{128} \times \frac{3}{4} = \frac{81}{512}$

このうち5回目でBが勝つのは、 $\frac{27}{128} \times \frac{1}{4} = \frac{27}{512}$

Aの勝ち点の期待値は、

$$\begin{aligned} & 3 \times \frac{27}{64} + 2 \times \frac{81}{256} + 1 \times \frac{81}{512} + (-3) \times \frac{1}{64} + (-2) \times \frac{9}{256} + (-1) \times \frac{27}{512} \\ &= 3 \times \frac{26}{64} + 2 \times \frac{72}{256} + 1 \times \frac{54}{512} = \frac{624 + 288 + 54}{512} = \frac{966}{512} = \frac{483}{256} \end{aligned}$$

となる。