数学の出題のねらい

数Ｉ・Ａに関する基本的事項の習得度合いおよびその応用力をみることをねらいとしています。具体的には，基礎的な計算能力，物事を数理的あるいは図形的に捉えて考察する能力，確率や命題の真偽に関する論理性などを，総合的に見ることを意図した出題を心掛けました。

第1問　解答例

問題 1

$$
\begin{aligned}
\text{(与式)} &= \left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^2 \\
&= \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right)^2 - \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \left(3+2\sqrt{2}\right)^2 - \left(3-2\sqrt{2}\right)^2 \\
&= \frac{12\cdot 4\sqrt{5}}{16} + 6\cdot 4\sqrt{2} \\
&= 3\sqrt{5} + 24\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

問題 2

$a = x-y$, $b = y-z$, $c = z-x$ とする. このとき $a+b+c=0$ であることと, 問題文の等式から

$$a^3+b^3+c^3 = 3abc = 3(x-y)(y-z)(z-x).$$

問題 3

(1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ と $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$ より

$$
\begin{aligned}
\sin\theta\cos\theta &= \frac{1}{2}\left((\sin\theta+\cos\theta)^2-1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2-1\right) \\
&= -\frac{2}{9}
\end{aligned}
$$

(2) 前問で得た $\sin\theta\cos\theta=-\frac{2}{9}$ を利用して,

$$
\begin{aligned}
\sin^3\theta+\cos^3\theta &= (\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta-\sin\theta\cos\theta) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{3}\left(1-\left(-\frac{2}{9}\right)\right) \\
&= \frac{11\sqrt{5}}{27}
\end{aligned}
$$

第2問　解答例

問題 1

問題文の 2 次方程式を整理して

$$x^2-(5+a)x+8+a=0.$$

この判別式を $\mathcal{D}$ とすると,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}=&(5+a)^2-4(8+a)\\ &=(a+7)(a-1).\end{aligned}$$

2 次方程式が実数解をもつための必要十分条件は $\mathcal{D} \geqq 0$ なので, これを解いて

$$a \leqq -7,\quad a \geqq 1. \tag{$*$}$$

$(*)$ 式より, $1 \leqq a \leqq 2$ の範囲では, 実数解 $x=\frac{(5+a)\pm\sqrt{\mathcal{D}}}{2}$ が常に存在する. したがって, $a=1$ のとき, $x=\frac{5+1}{2}=3$ (重解), $a=2$ のとき, $x=\frac{(5+2)\pm\sqrt{9\cdot 1}}{2}$ より, $x=2$ および $x=5$ を得る.

問題文の 2 次方程式の解は, 放物線 $y=x^2-5x+8$ と直線 $y=a(x-1)$ の共有点の x 座標とみなすことができる. ただし, この直線は定点 $(1,0)$ を通り, 傾きが a （$1 \leqq a \leqq 2$）であることに注意する. 図 1 は, 放物線 $y=x^2-5x+8$ と直線 $y=a(x-1)$ （ただし, $a=1,\ 2$）の共有点を示している. 図 1 より, 求める実数解の値の範囲は

$$2 \leqq x \leqq 5.$$

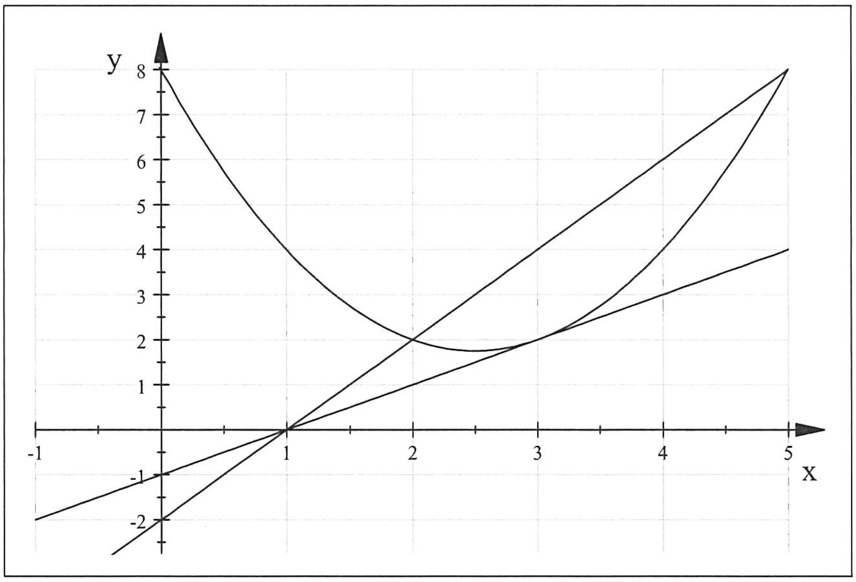

図 1

問題 2

2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつための必要十分条件は, $\mathcal{D} > 0$ なので, 問題 1 より, $a < -7,\ a > 1$ を得る.

$a < -7$ のとき, 放物線 $y = x^2 - 5x + 8$ と直線 $y = a(x-1)$ の共有点の x 座標は, 定点 $(1,0)$ の x 座標よりも小さくなるので, $x < 1$ となり, 問題文の条件である $2 \leqq x \leqq 4$ を満たさない. したがって, 以下では $a > 1$ の範囲のみ考える.

次の 2 つのケースを考える.

ケース 1： 実数解が $x = 2$ のとき, $a = 2$ を得る. このとき, もう一方の実数解は $x = 5$ である. したがって, $2 \leqq x \leqq 4$ の範囲では, 実数解は $x = 2$ の 1 つだけとなる.

ケース 2： 実数解が $x = 4$ のとき, $a = \frac{4}{3}$ を得る. このとき, もう一方の実数解は $x = \frac{7}{3}$ である. したがって, $2 \leqq x \leqq 4$ の範囲では, 実数解は $x = 4$ および $x = \frac{7}{3}$ の 2 つとなる.

$2 \leqq x \leqq 4$ において, 放物線 $y = x^2 - 5x + 8$ と直線 $y = a(x-1)$ （ただし, $a > 1$）が異なる 2 つの共有点をもつ場合を考える. 図 2 は, 図 1 に直線 $y = \frac{4}{3}(x-1)$ を書き加えたものである. 上記のケース 1, 2 および図 2 より, 求める a の値の範囲は

$$1 < a \leqq \frac{4}{3}.$$

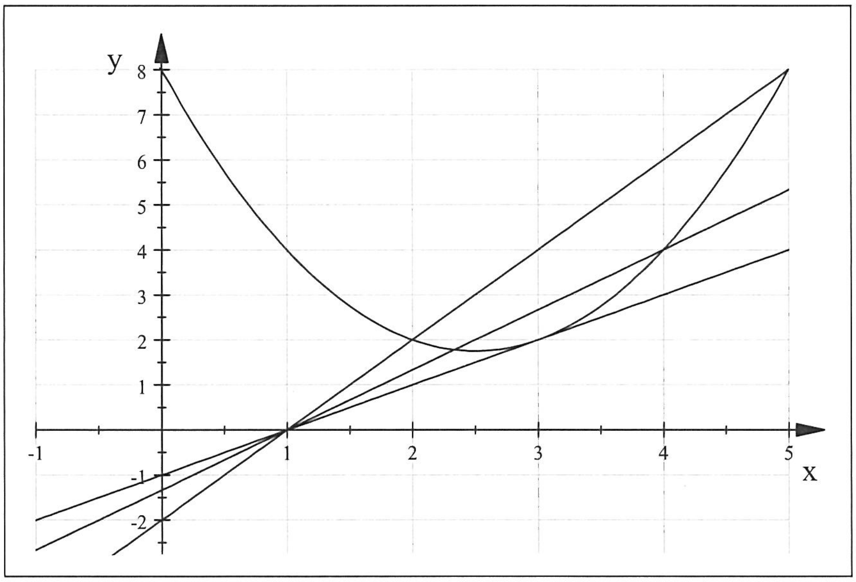

図 2

第3問　解答例

問題 1

問題文で与えている 2 つの事象の余事象の確率を, 次のようにそれぞれ $\bar{p}$, $\bar{q}$ とする.

- 試行を 3 回繰り返したとき, 3 回金貨が出る確率を $\bar{p}$ とする.
- 試行を 5 回繰り返したとき, 5 回金貨が出る, または 4 回金貨が出る確率を $\bar{q}$ とする.

このとき

$$\begin{aligned}\bar{p} &= {}_3C_3\left(\frac{6}{10}\right)^3\left(1-\frac{6}{10}\right)^0 \\ &= \left(\frac{3}{5}\right)^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{q} &= {}_5C_5\left(\frac{6}{10}\right)^5\left(1-\frac{6}{10}\right)^0 + {}_5C_4\left(\frac{6}{10}\right)^4\left(1-\frac{6}{10}\right) \\ &= \frac{39}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^3\end{aligned}$$

ゆえに $\bar{p} < \bar{q}$ を得る.

比較するのは, $p = 1 - \bar{p}$ と $q = 1 - \bar{q}$ なので

$$p > q$$

を得る.

問題 2

問題 1 と同様に考える. 1 回の試行で金貨が出る確率を t とする. 問題文の条件より, $t = \frac{a}{10}$ (ただし, a は 1 以上 9 以下の自然数) と定義する.

試行を 3 回繰り返したとき, 3 回金貨が出る確率を $\bar{p}$ とすると

$$\begin{aligned}\bar{p} &= {}_3C_3 \cdot t^3 (1-t)^0 \\ &= t^3\end{aligned}$$

試行を 5 回繰り返したとき, 5 回金貨が出る, または 4 回金貨が出る確率を $\bar{q}$ とすると

$$\begin{aligned}\bar{q} &= {}_5C_5 \cdot t^5 (1-t)^0 + {}_5C_4 \cdot t^4 (1-t) \\ &= t^5 + 5t^4 (1-t) \\ &= t^3(t^2 + 5t(1-t)) \\ &= t^3(-4t^2 + 5t)\end{aligned}$$

ここで, $p = 1 - \bar{p}$ および $q = 1 - \bar{q}$ であることと, t の定義より $t^3 > 0$ であることに注意する. $p < q$ が成り立つならば

$$-4t^2 + 5t < 1.$$

この不等式を解くと

$$t < \frac{1}{4}, \quad t > 1$$

を得る. $t = \frac{a}{10}$ であるので

$$a < \frac{5}{2}, \quad a > 10. \tag{$**$}$$

a は 1 以上 9 以下の自然数なので, $(**)$ 式より a の最大値は

$$a = 2.$$

第4問　解答例

問題 1

放物線 (1) と (2) の交点 B, D の x 座標は, 以下の 2 次方程式の解である.

$$-\frac{3}{16}x^2+\frac{5}{4}x+6=\frac{x^2}{8}-4.$$

これを解いて $x=-4$ および $x=8$. ゆえに $\mathrm{B}(-4,-2)$ および $\mathrm{D}(8,4)$ を得る. このとき直線 BD の方程式は $y=\frac{x}{2}$ となる. (図 3 参照)

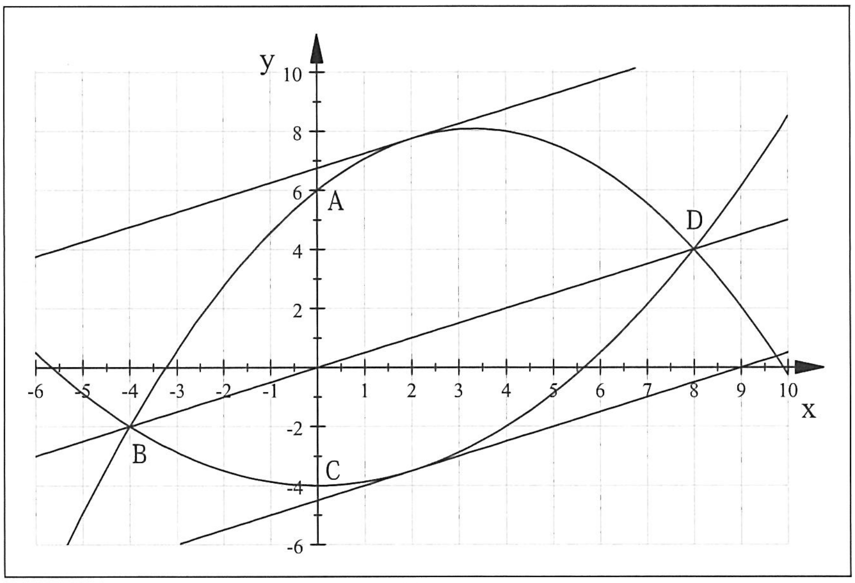

図 3

問題 2

直線 BD に平行な直線 $l: y=\frac{x}{2}+\alpha$ を考える. 直線 l が放物線 (1) と接するときの接点を E$'$, 直線 l が放物線 (2) と接するときの接点を E$''$ とする. $\triangle$BDE の面積が最大になるような点 E は, E$'$ と E$''$ のうちで $|\alpha|$ の値が大きいほうである.

以下の 2 つのケースを比較する. (図 3 参照)

ケース 1: 点 E$'$ のときを考える. このとき, 2 次方程式： $-\frac{3}{16}x^2+\frac{5}{4}x+6=\frac{1}{2}x+\alpha$ は重解をもつ. 判別式を $\mathcal{D}$ とすると

$$\frac{\mathcal{D}}{4}=36-3(16\alpha-96)=0.$$

これを解いて $\alpha=\frac{27}{4}$.

ケース 2: 点 E'' のときを考える．このとき，2 次方程式： $\frac{x^2}{8}-4=\frac{1}{2}x+\alpha$ は重解をもつ．先と同様にして，$\alpha=-\frac{9}{2}$.

以上から $|\alpha|$ の値が大きいのは点 E' のときである．$\alpha=\frac{27}{4}$ を $-\frac{3}{16}x^2+\frac{5}{4}x+6=\frac{1}{2}x+\alpha$ に代入して，この 2 次方程式を解くことにより，点 E' の x 座標，すなわち点 E の x 座標である $x=2$ を得る．これにより点 E の座標

$$\mathrm{E}\left(2,\frac{31}{4}\right)$$

を得る．

問題 3

背理法で示す．四角形 ABCD に内接する円が存在すると仮定する．このとき内接円の性質から

$$\mathrm{AB}+\mathrm{CD}=\mathrm{BC}+\mathrm{AD} \qquad (***)$$

が成り立つ．$\mathrm{A}(0,6)$ および $\mathrm{C}(0,-4)$ に注意する．点 A, B, C, D の座標から

$$\mathrm{AB}=4\sqrt{5},\ \mathrm{BC}=2\sqrt{5},\ \mathrm{CD}=8\sqrt{2},\ \mathrm{AD}=2\sqrt{17}$$

を得るので，AB>BC および CD$=\sqrt{128}>\sqrt{68}=$AD が成り立つ．したがって

$$\mathrm{AB}+\mathrm{CD}>\mathrm{BC}+\mathrm{AD}.$$

これは $(***)$ 式に矛盾する．ゆえに四角形 ABCD に内接する円は存在しない．