

数学の出題のねらい

数Ⅰ・Aに関する基本的事項の習得度合いおよびその応用力をみることをねらいとしています。具体的には、基礎的な計算能力、物事を数理的あるいは図形的に捉えて考察する能力、確率や命題における論理性などを、総合的に見ることを意図した出題を心掛けました。

第 1 問 (配点 25 点)

次の問いに答えよ.

問題 1

次の式を因数分解せよ.

$$3x^2 - 4xy - 8x - 4y^2 - 8y - 3$$

問題 2

$0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ のとき, 次の式を計算せよ.

$$\left\{ \left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \right)^4 + \left(\frac{1}{\cos \theta} - \tan \theta \right)^4 \right\}^2 - \left\{ \left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \right)^4 - \left(\frac{1}{\cos \theta} - \tan \theta \right)^4 \right\}^2$$

問題 3

$x + y + z \neq 0$ のとき, 次の式の値を求めよ.

$$\frac{x+2y}{z} = \frac{y+2z}{x} = \frac{z+2x}{y}$$

解答例

問題 1

$$\begin{aligned} & 3x^2 - 4xy - 8x - 4y^2 - 8y - 3 \\ &= 3x^2 - (4y+8)x - 4y^2 - 8y - 3 \\ &= 3x^2 - (4y+8)x - (2y+3)(2y+1) \\ &= (3x+2y+1)(x-2y-3) \end{aligned}$$

問題 2

$$\begin{aligned} & A = \frac{1}{\cos \theta}, \quad B = \tan \theta \quad \text{とすると, 与式は} \\ & \left\{ (A+B)^4 + (A-B)^4 \right\}^2 - \left\{ (A+B)^4 - (A-B)^4 \right\}^2 \\ &= 2(A+B)^4 \cdot 2(A-B)^4 \\ &= 4(A^2 - B^2)^4 \\ &= 4 \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta \right)^4 = 4 \left(\frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right)^4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

問題 3

$$\frac{x+2y}{z} = \frac{y+2z}{x} = \frac{z+2x}{y} = k$$

とおく. 次の2つの場合を考える.

ケース1： $k \neq 0$.

与式から

$$\begin{cases} x + 2y = kz \\ y + 2z = kx \\ z + 2x = ky \end{cases}$$

を得る. この3つの等式の辺々を加えて

$$3(x + y + z) = k(x + y + z)$$

条件より $x + y + z \neq 0$ であるので $k = 3$ である.

ケース2： $k = 0$.

先と同様にして次を得る.

$$3(x + y + z) = 0$$

ゆえに

$$x + y + z = 0$$

これは条件 $x + y + z \neq 0$ に不適である.

以上から **求める値は3**である.

第2問 (配点 25 点)

x の 2 次方程式 $x^2 + (a+2)x + 2a+b = 0$ について考える. a, b を以下のように決める.

サイコロを 2 回投げる. 1 回目に出た目を a とする. 2 回目に出た目が 4 以下のとき $b=1$ とし, 5 以上のとき $b=0$ とする.

問題 1

この方程式が実数解を持つ確率を求めよ.

問題 2

この方程式について, 少なくとも 1 つの実数解が $x < -\frac{5}{2}$ となる確率を求めよ.

解答例

問題 1

$f(x) = x^2 + (a+2)x + 2a+b$ とおく.

2 次方程式 $f(x) = 0$ の判別式を D とする.

• $b=1$ のとき, $f(x) = x^2 + (a+2)x + 2a+1 = 0$ について実数解をもつので $D \geq 0$.

$$\begin{aligned} D &= (a+2)^2 - 4(2a+1) \\ &= a^2 - 4a = a(a-4) \end{aligned}$$

より $a \leq 0, a \geq 4$ のときに実数解が存在する. つまり $(a, b) = (4, 1), (5, 1), (6, 1)$.

$b=1$ となるのは 2 回目に出た目が 4 以下のときなので, 場合の数は $3 \times 4 = 12$ 通り.

• $b=0$ のとき,

$$\begin{aligned} D &= (a+2)^2 - 4 \cdot 2a \\ &= a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

実数解が存在する組み合わせは, $(a, b) = (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (5, 0), (6, 0)$. $b=0$ となるのは 2 回目に出た目が 5 以上のときなので, 場合の数は $6 \times 2 = 12$ 通り.

したがって求める確率は, $\frac{12+12}{36} = \frac{2}{3}$.

問題 2

次の (1) と (2) のケースを考える.

(1) 解が 2 つとも $x < -\frac{5}{2}$ にあるか, または $x < -\frac{5}{2}$ で重解をもつケース

① 軸が $x < -\frac{5}{2}$ にある, ② $D \geq 0$, ③ $f(-\frac{5}{2}) > 0$ の 3 つの条件を満たす a を求めれば良い.

• $b=1$ のとき

①の条件は、条件は、 $\frac{(a+2)}{-2} < -\frac{5}{2}$ よって、 $a > 3$.

②の条件は、問題1より $a \geq 4$

③の条件は、 $f(-\frac{5}{2}) = \frac{25}{4} - \frac{5}{2}a - 5 + 2a + 1 > 0$ よって、 $a < \frac{9}{2}$

①～③の条件を満たすのは、 $a = 4$ のみ. $b = 1$ となる条件から、場合の数は 4通り.

• $b=0$ のとき

③の条件は、 $f(-\frac{5}{2}) = \frac{25}{4} - \frac{5}{2}a - 5 + 2a > 0$ よって、 $a < \frac{5}{2}$

①の条件は $a > 3$ であった.

①～③を満たす a は無い.

(2) 解の1つが $x \geq -\frac{5}{2}$ に存在するケース

① $D \geq 0$, ② $f(-\frac{5}{2}) \leq 0$ の2つの条件を満たす a を求めれば良い.

• $b=1$ のとき

①の条件は、問題1のとおり.

②の条件は、 $f(-\frac{5}{2}) = \frac{25}{4} - \frac{5}{2}a - 5 + 2a + 1 \leq 0$ よって、 $a \geq \frac{9}{2}$

①②を満たす組み合わせは、 $(a, b) = (5, 1), (6, 1)$ なので、場合の数は 8通り.

• $b=0$ のとき

②の条件は、 $f(-\frac{5}{2}) = \frac{25}{4} - \frac{5}{2}a - 5 + 2a \leq 0$ $a \geq \frac{5}{2}$

①の条件は、問題1のとおり.

①②の条件を満たす組み合わせは、 $(a, b) = (3, 0), (4, 0), (5, 0), (6, 0)$ なので、場合の数は 8通り.

(1) (2)より、求める確率は $\frac{4+8+8}{36} = \frac{5}{9}$.

第3問 (配点 25 点)

四角形 $ABCD$ は円 O に内接し, $AB=3$, $BC=2$, $\cos \angle ABC = -\frac{1}{3}$ をみたしており, $\triangle ADC$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の 2 倍とする.

問題 1

AC の長さを求めよ.

問題 2

$AD \cdot CD$ の値を求めよ.

問題 3

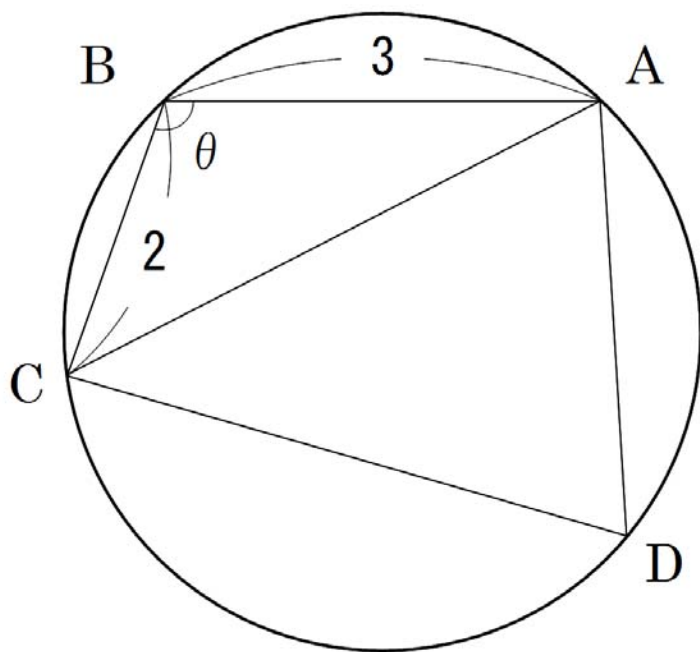
$AD^2 + CD^2$ の値を求めよ.

問題 4

$AD < CD$ のとき AD と CD の長さを求めよ.

解答例

問題 1



余弦定理を $\triangle ABC$ に用いる.

$$AC^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= 9 + 4 + 4 = 17$$

$$AC = \sqrt{17}$$

問題 2

∠ABC を θ とおくと、円に内接する四角形の内対角の和は 180° であることから、

$$\angle ADC = 180^\circ - \theta$$

$$\triangle ABC \text{ の面積は } \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \theta$$

$$\sin \theta = \sin(180^\circ - \theta) \text{ より}$$

$$\triangle ADC \text{ の面積は } \frac{1}{2} AD \cdot CD \cdot \sin(180^\circ - \theta) = \frac{1}{2} AD \cdot CD \cdot \sin \theta$$

問題文より $\triangle ADC$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の 2 倍だから $AD \cdot CD$ は $AB \cdot BC$ の 2 倍であり、 $AB \cdot BC = 6$ から、 $AD \cdot CD$ の値は 12.

問題 3

余弦定理を $\triangle ADC$ に用いる.

$$17 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos(180^\circ - \theta) = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot (-\cos \theta)$$

$$= AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \frac{1}{3}$$

$$AD^2 + CD^2 = 17 + 2AD \cdot CD \cdot \frac{1}{3} = 25$$

問題 4

問題 2 と問題 3 より

$$AD^2 + CD^2 + 2 \cdot AD \cdot CD = 25 + 24 = 49 = (AD + CD)^2$$

$$AD + CD = 7$$

AD を x とおくと、 $CD = 7 - x$

$$x(7 - x) = 12$$

$$x = 3, 4$$

$AD < CD$ より

$$AD = 3, CD = 4$$

第4問 (配点 25 点)

n を自然数として, 次の式の値を考える.

$$f(n) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$$

問題 1

$n(n+1)(n+2)(n+3)$ が 24 の倍数であることを証明せよ.

問題 2

$f(n) = 35$ を満たすような n の値を求めよ.

問題 3

n が $1 \leq n \leq 35$ のとき, $f(n)$ の値が 35 の倍数になるような n は何個あるか.

解答例

問題1

証明には次の主張を用いる.

主張1: k を任意の自然数とする. 連続2整数の積 $k(k+1)$ は2の倍数となる. なぜなら, この2整数のうち1つは偶数となるからである.

主張2: k を任意の自然数とする. 連続する2偶数の積 $2k(2k+2)$ は8の倍数となる. なぜなら,

$$\begin{aligned} 2k(2k+2) &= 4k^2 + 4k \\ &= 4k(k+1) \\ &= 4 \cdot 2m \quad (m \text{ は自然数}) \\ &= 8m \end{aligned}$$

となるからである. 3番目の等号は**主張1**による.

主張3: k を任意の自然数とする. 連続する3整数の積 $k(k+1)(k+2)$ は3の倍数となる. なぜならこの3整数のうち1つは3の倍数となるからである.

以上の主張を用いて, 題意を示す. 連続する4整数は連続2偶数を含むので, この連続4整数の積は**主張2**から, 8の倍数である. さらに連続する4整数は連続3整数を含むので, この連続4整数の積は**主張3**から, 3の倍数である. 従って, 連続4整数の積は8の倍数であり, かつ3の倍数である. すなわち, **24の倍数**である. (証了)

問題2

$f(n) = 35$ より

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) &= 24 \cdot 35 \\ &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ &= 2^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \\ &= 2^2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \\ &= 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \end{aligned}$$

ゆえに n の値は4である.

問題3

$f(n)$ が35 の倍数になるのは、連続する4整数 $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ が5の倍数と7の倍数をそれぞれ1つずつ含むとき、あるいは35の倍数を1つ含むときに限る. 5の倍数と7の倍数の組 (a, b) を含む連続4整数の先頭の自然数を $n^*(a, b)$ で定義する (ただし, 5の倍数と7の倍数のうち小さい方を a とする). また, 35の倍数 c を含む連続4整数の先頭の自然数を $n^*(c)$ で定義する.

$1 \leq n^* \leq 35$ のとき,

$$n^*(5, 7) = 4, 5$$

$$n^*(7, 10) = 7$$

$$n^*(14, 15) = 12, 13, 14$$

$$n^*(20, 21) = 18, 19, 20$$

$$n^*(25, 28) = 25$$

$$n^*(28, 30) = 27, 28$$

$$n^*(35) = 32, 33, 34, 35$$

従って, 題意を満たすような n は16個ある.