

数学の出題のねらい

数Ⅰ・Aに関する基本的事項の習得度合いおよびその応用力をみることをねらいとしています。具体的には、基礎的な計算能力、物事を数理的あるいは図形的に捉えて考察する能力、場合の数や図形の性質を論理的に考察する能力などを、総合的に見ることを意図した出題を心掛けました。

第1問

問題 1

$u = a^3 + 2a$ とおくと, 与式は次のように因数分解できる.

$$\begin{aligned}(a^3 + 2a + 7)(a^3 + 2a - 1) - 9 &= (u + 7)(u - 1) - 9 \\ &= u^2 + 6u - 16 \\ &= (u + 8)(u - 2) \\ &= (a^3 + 2a + 8)(a^3 + 2a - 2).\end{aligned}$$

問題 2

n をデータ数, s^2 をデータの分散, $\bar{x}$ をデータの平均とする. 変量 x の n 個のデータを $x_1, x_2, \dots, x_n$ とするとき,

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{1}{n} ((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2) \\ &= \frac{1}{n} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - (\bar{x})^2\end{aligned}$$

が成り立つので, 問題文の条件から次の式を得る.

$$10 = \frac{1}{5} (2^2 + 1^2 + 4^2 + p^2 + 3^2) - \left(\frac{1}{5} (2 + 1 + 4 + p + 3) \right)^2.$$

これを p について整理すると, $p^2 - 5p - 50 = 0$ を得る. 因数分解して,

$$(p - 10)(p + 5) = 0$$

となるので, $p = -5, 10$ である.

問題 3

すべての自然数 n は, 整数 $k \geq 0$ と $j = 1, 2, 3, 4$ を使って次のように表される.

$$n = 5k + j$$

整数 $k \geq 0$ と $j = 1, 2, 3, 4$ に対して,

$$\begin{aligned}n^4 - 1 &= (5k + j)^4 - 1 \\ &= (5 \cdot 5k^2 + 2 \cdot 5kj + j^2)^2 - 1 \\ &= (5k(5k + 2j) + j^2)^2 - 1 \\ &= 5^2 \cdot k^2(5k + 2j)^2 + 2 \cdot 5k(5k + 2j)j^2 + (j^4 - 1)\end{aligned}$$

$(j^4 - 1)$ 以外の項はすべて 5 の倍数であるので, $n^4 - 1$ を 5 で割った余りは, $j^4 - 1 \geq 0$ を 5 で割った余りに等しい. $j = 1, 2, 3, 4$ に対して, $j^4 - 1$ はそれぞれ, 0, 15, 80, 255 となるので, $j^4 - 1$ を 5 で割った余りは 0 になる. ゆえに, $n^4 - 1$ を 5 で割った余りは 0 である.

第2問

問題 1

座標平面上の原点を O とする. 問題文の放物線と x 軸との 2 つの交点を, それぞれ $E(1, 0)$, $F(-1, 0)$ とする. 放物線の頂点を $G(0, -\frac{2}{3})$ とする. まず次の 2 つのケースを論じる.

- $a < \frac{1}{3}$ のとき, $B(3a, 0)$, $C(0, -2a)$, $D(-3a, 0)$ について, $OB < OE$, $OC < OG$, $OD < OF$ となるので, 共有点の総数は 0 個である.
- $a = \frac{1}{3}$ のとき, 共有点は点 E, F, G なので, その総数は 3 個となる.

したがって, 上記の場合では共有点の総数はいずれも 4 個にならない.

以下の議論では, $a > \frac{1}{3}$ とする. このとき, y 軸上にある $C(0, -2a)$ は, 同じく y 軸上にある点 $G(0, -\frac{2}{3})$ の下に必ず位置することに注意する. さらに, $B(3a, 0)$, $D(-3a, 0)$ について, 必ず $OB > OE$, $OD > OF$ となることにも注意する.

辺 AB と放物線および辺 AD と放物線の共有点はそれぞれ 1 個である. 四角形 $ABCD$ および放物線はともに y 軸に対して対称なので, 辺 BC と放物線の共有点の数と辺 CD と放物線の共有点の数は常に等しい. したがって, 共有点の総数が 4 個ならば, 辺 BC と放物線の共有点は必ず 1 個でなくてはならない.

直線 BC の方程式は

$$y = \frac{2}{3}x - 2a$$

なので, 線分 BC と放物線の共有点が 1 個であることと, $a > \frac{1}{3}$ のとき 2 次方程式

$$\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}x - 2a$$

が $0 \leq x \leq 3a$ の範囲で重解を持つことは同値である. 判別式を D とすると

$$D = 1 - 4(3a - 1) = 0$$

なので, $a = \frac{5}{12}$ を得る. これは $a > \frac{1}{3}$ を満たす. このとき, $x = \frac{1}{2}$ であり, $0 \leq x \leq 3a = \frac{5}{4}$ も満たされる. 従って, $A(0, \frac{5}{6})$, $B(\frac{5}{4}, 0)$, $C(0, -\frac{5}{6})$, $D(-\frac{5}{4}, 0)$ を得る.

四角形 $ABCD$ の面積を S とすると, ひし形の面積を求めればよいので,

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{12}.$$

問題 2

$a > \frac{1}{3}$ とする. 前問で論じたように, 辺 AB と放物線および辺 AD と放物線の共有点はそれぞれ 1 個である. また, 辺 BC と放物線の共有点の数と辺 CD と放物線の共有点の数は常に等しく, 辺 BC と放物線の共有点は高々 2 個存在する.

辺 BC と放物線の共有点が 2 個存在するような a の範囲を調べる. 線分 BC と放物線の共有点が 2 個であることと, $a > \frac{1}{3}$ のとき 2 次方程式

$$\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 2a \quad (\dagger)$$

が $0 \leq x \leq 3a$ の範囲で異なる 2 解を持つことは同値である. 判別式を D とすると,

$$D = 1 - 4(3a - 1) > 0$$

なので, $a < \frac{5}{12}$ を得る. $\frac{1}{3} < a < \frac{5}{12}$ のとき, $0 < D < 1$ であるので,

$$0 < \frac{1 \pm \sqrt{D}}{2} < 1.$$

(†) 式の解が $x = \frac{1 \pm \sqrt{D}}{2}$ で表されることに注意すると, $0 \leq x \leq 3a$ を満たす.

ゆえに, 共有点の総数が最も多くなるのは 6 個のときであり, そのような a の値の範囲は,

$$\frac{1}{3} < a < \frac{5}{12}.$$

第3問

問題 1

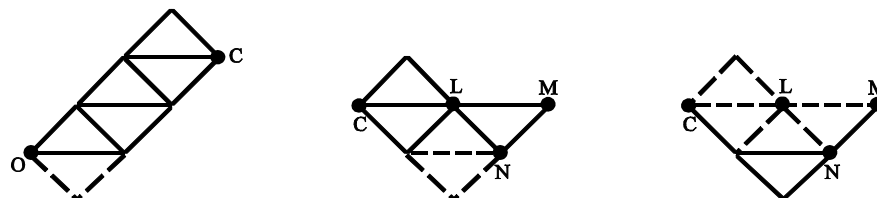


図 1 (左) O から C に到達する経路 (中央) C から L を経由して M に到達する経路
(右) C から L を経由しないで M に到達する経路

まず, O から C に到達する経路を考える. 図 1(左) より, O から C に到達する経路は, 斜め上 (右上) 方向に 3 回, 斜め下 (右下) 方向に 1 回進む経路と, 斜め上 (右上) 方向に 2 回, 右方向に 1 回進む経路がある. したがって,

$$\frac{(3+1)!}{3! \cdot 1!} + \frac{(2+1)!}{2! \cdot 1!} = 7(\text{通り}).$$

ここで, O から斜め下 (右下) 方向に進むことができないため, 図 1(左) の点線部を通る経路の 1 通りを引かなければならない. したがって, 最終的に O から C に到達する経路は, $7 - 1 = 6$ (通り) となる.

次に, C から M に到達する経路を, L を経由するか否かで場合分けして考える.

- C から L を経由して M に到達する経路: 図 1(中央) より C から L に到達する経路は 3 通りある. L から M に到達する経路は 2 通りである. したがって, C から L を経由して M に到達する経路は, $3 \times 2 = 6$ (通り) である.
- C から L を経由しないで M に到達する経路: 図 1(右) より, L を経由しないで, C から N に到達する経路は 2 通りある. N から M に到達する経路は 1 通りである. したがって, C から L を経由しないで M に到達する経路は, $2 \times 1 = 2$ (通り) である.

以上の議論より, C から M に到達する経路は, $6 + 2 = 8$ (通り) である. したがって, O から M に到達する経路のうち, C を通る経路は,

$$6 \times 8 = 48(\text{通り}).$$

問題 2

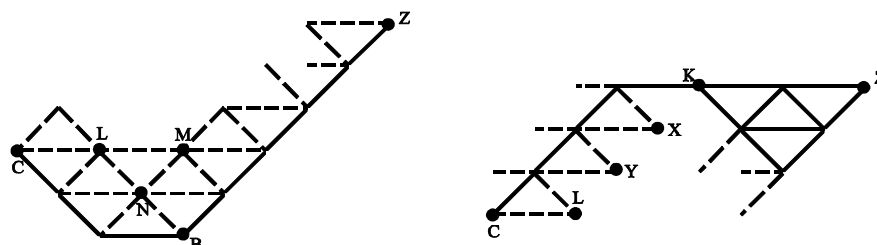


図 2 (左) C から Z に到達する経路のうち, K, L, M, N を経由しない経路
(右) C から Z に到達する経路のうち, K を経由する経路

C から M を経由せず Z に到達する経路について, 以下の場合分けを行う.

- L と N を経由する経路: 前問より, C から L を経由して N に到達する経路は 3 通りである. また N から Z に到達する経路は 2 通りである. したがって, C から Z に到達する経路のうち, M を通らないが, L と N を経由する経路は, $3 \times 2 = 6$ (通り) である.
- L を経由しないで N を経由する経路: 前問より, C から L を経由しないで N に到達する経路は 2 通りである. 先述のケースより, N から Z に到達する経路は 2 通りである. したがって, C から Z に到達する経路のうち, L と M を通らないが, N を経由する経路は, $2 \times 2 = 4$ (通り) である.
- K, L, N を経由しない経路: 図 2 (左) のように, C から斜め下 (右下) 方向に 2 回, 右方向に 1 回進んで B を経由し, そこから斜め上 (右上) 方向に 5 回進む経路しかない. したがって, C から Z に到達する経路のうち, K, L, M, N を通らない経路は, 1(通り) である.
- K を経由する経路: 図 2 (右) を考える. C から K に到達する経路は 1 通りある. 次に, K から Z に到達する経路を考える. この経路は, 前問で議論した C から M に到達する経路とほぼ同じように考えることができる. ただし, K から斜め上 (右上) に進むことができないので, 先述の C から M に到達する経路より, $1 \times 2 = 2$ (通り) だけ, 経路の数は少なくなる. したがって, C から Z に到達する経路のうち, K を経由する経路は, $8 - 2 = 6$ (通り) である.

以上の 4 つのケースから, C から Z に到達する経路のうち, M を通らない経路は $6 + 4 + 1 + 6 = 17$ (通り) となる. 前問より, O から C に到達する経路は 6 通りである. したがって, O から Z に到達する経路のうち, C を通り, M を通らない経路は,

$$6 \times 17 = 102 \text{ (通り) .}$$

第4問

問題 1

正四面体 ABCD の一辺の長さを l (ただし, $l > 0$) とする. $\triangle ABH$, $\triangle ACH$, $\triangle ADH$ について

$$\begin{aligned} AB &= AC = AD, \quad AH \text{ (共通)} \\ \angle AHB &= \angle AHC = \angle AHD = 90^\circ \end{aligned}$$

これらの直角三角形について, 対応する斜辺と他の一辺の長さがそれぞれ等しいので

$$\triangle ABH \equiv \triangle ACH \equiv \triangle ADH.$$

ゆえに

$$BH = CH = DH.$$

これは点 H が $\triangle BCD$ の外心であることを意味する. $\triangle BCD$ について正弦定理を用いると,

$$\frac{l}{\sin 60^\circ} = 2BH$$

ゆえに $BH = \frac{l}{\sqrt{3}}$ を得る.

$\triangle ABH$ について三平方の定理を適用して,

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}l$$

$AH = \sqrt{6}$ であるから, $l = 3$ を得る.

問題 2

前問より $CD = 3$ であるので, $DQ = 3 - CQ = 3 - (3 - x) = x$.

$\triangle ABP$ と $\triangle ADQ$ について,

$$AB = AD, \quad BP = DQ = x, \quad \angle ABP = \angle ADQ.$$

対応する二辺とその間の角がそれぞれ等しいので,

$$\triangle ABP \equiv \triangle ADQ.$$

ゆえに,

$$AP = AQ. \tag{1}$$

$\triangle ABP$ について, 前問より $AB = 3$ であることと余弦定理を適用して,

$$\begin{aligned} AP^2 &= AB^2 + BP^2 - 2AB \cdot BP \cdot \cos \angle ABP \\ &= 3^2 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \cos 60^\circ \\ &= x^2 - 3x + 9. \end{aligned} \tag{2}$$

$CP = CQ$ および $\angle PCQ = 60^\circ$ から, $\triangle CPQ$ は正三角形であることに注意すると,

$$PQ = CQ = 3 - x. \quad (3)$$

上述の (1) 式, (2) 式および (3) 式より,

$$\begin{aligned} AP^2 + PQ^2 + QA^2 &= 2AP^2 + PQ^2 \\ &= 2(x^2 - 3x + 9) + (3 - x)^2 \\ &= 3(x - 2)^2 + 15. \end{aligned}$$

$0 < x < 3$ に注意すると, $AP^2 + PQ^2 + QA^2$ の値が最小になるのは,

$$x = 2.$$

問題 3

外接する球の中心が O であるので,

$$OA = OB = OC = OD. \quad (4)$$

AB と CD の中点をそれぞれ M, N とする.

AH は平面 BCD に垂直である. 点 H は $\triangle BCD$ の外心である (問題 1 の解答を参照) ので, AH が平面 BCD に垂直であることと合わせて考えると, 3 点 B, C, D から等距離にある点 O (上述の (4) 式参照) は AH 上に存在する.

一方, $\triangle BCD$ は正三角形であり, 点 H は $\triangle BCD$ の外心なので, H は中線 BN 上に存在する. よって, AH は平面 ABN 上の直線である.

点 O は 2 点 A, B から等距離にある (上述の (4) 式参照) ので, $AN = BN$ を満たす $\triangle ABN$ において, 点 O は AB の垂直二等分線である直線 MN 上に存在する.

以上の議論をまとめると, $\triangle ABN$ において点 O は AH と MN の交点になる. MN は $\triangle ABH$ の 3 辺またはその延長と交わっているので, メネラウスの定理を適用して,

$$\frac{BN}{HN} \cdot \frac{OH}{AO} \cdot \frac{AM}{BM} = 1 \quad (5)$$

が成り立つ.

正三角形の外心と重心は一致し, 重心は中線を $2:1$ に内分するので, $BN:HN = 2+1:1 = 3:1$ である. また $AM:BM = 1:1$ である. よって, (5) 式は

$$\frac{3}{1} \cdot \frac{OH}{AO} \cdot \frac{1}{1} = 1$$

となる. ゆえに

$$AO:OH = 3:1$$

であることが示された.