数学の出題のねらい

数Ｉ・Ａに関する基本的な事項の習得度合いおよびその応用力をみることをねらいとしています．具体的には，基礎的な計算能力やデータの分析能力，グラフによって関数を考察する能力，図形の性質を論理的に考察する能力，事象を確率によって考察する能力などを総合的に見ることを意図した出題を心掛けました．

第 1 問

問題 1

$$2x^2y-3x^2+4xy^2-12xy+9x-12y^2+18y$$
$$=4y^2(x-3)+2y(x^2-6x+9)-3x(x-3)$$
$$=4y^2(x-3)+2y(x-3)^2-3x(x-3)$$
$$=(x-3)(4y^2+2y(x-3)-3x)$$
$$=(x-3)(x+2y)(2y-3)$$

問題 2

（1）

A グループが 30 人, B グループが 10 人である. 全体の平均値は $\bar{x}=\dfrac{4\times 30+8\times 10}{40}=5$.

（2）

分散 $s^2=\overline{x^2}-(\bar{x})^2$ 　である.

A グループの得点の 2 乗の平均値を $\overline{x_A^2}$ とすると， $1.6=\overline{x_A^2}-(\bar{4})^2$ より $\overline{x_A^2}=17.6$.

同様に B グループの得点の 2 乗の平均値を $\overline{x_B^2}$ とすると， $\overline{x_B^2}=66.4$.

全体の得点の 2 乗の平均値は， $\overline{x^2}=\dfrac{17.6\times 30+66.4\times 10}{40}=29.8$ 　となる.

よって， $s^2=29.8-(5)^2=4.8$.

問題 3

（1）

$$(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^3-(\cos^6\theta+\sin^6\theta)$$
$$=(\cos^6\theta+\sin^6\theta+3\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta))-(\cos^6\theta+\sin^6\theta)$$
$$=3\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$
$$=3\cos^2\theta\sin^2\theta$$

（２）

（１）の結果より，$\cos^6\theta+\sin^6\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^3-3\cos^2\theta\sin^2\theta$.

$$\frac{2(\cos^6\theta+\sin^6\theta)+1}{3(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}$$

$$=\frac{2((\cos^2\theta+\sin^2\theta)^3-3\cos^2\theta\sin^2\theta)+1}{3((\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-2\cos^2\theta\sin^2\theta)}$$

$$=\frac{2(1-3\cos^2\theta\sin^2\theta)+1}{3(1-2\cos^2\theta\sin^2\theta)}$$

$$=\frac{3-6\cos^2\theta\sin^2\theta}{3(1-2\cos^2\theta\sin^2\theta)}=1$$

第 2 問

問題 1

この問題の 2 次関数$f(x)$は次のように変形できる．

$f(x) = x^2 - 2ax + 2a$=$(x^2 - 2ax + a^2) + (2a - a^2)$

$= (x - a)^2 + (2a - a^2)$

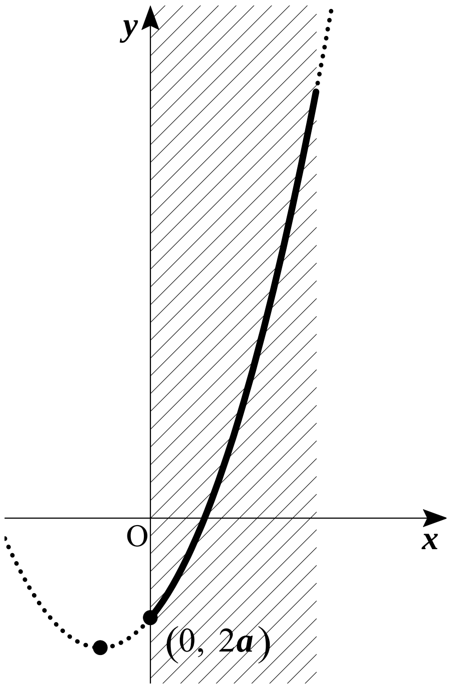
そのグラフは頂点を$(a, 2a - a^2)$とする下に凸の放物線である．

$0 \leqq x \leqq 2$と定義域が定められているので，頂点のx座標であるaの値によって次のように分類する．

（ｉ）a≦0 の場合，

$f(x)$は$x = 0$で最小値をとるので，最小値mは

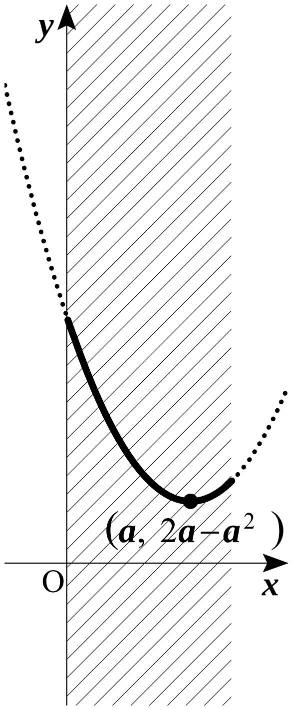
$f(0) = 2a$



（ⅱ）$0 < a < 2$の場合，

$f(x)$は$x = a$で最小値をとるので，最小値mは

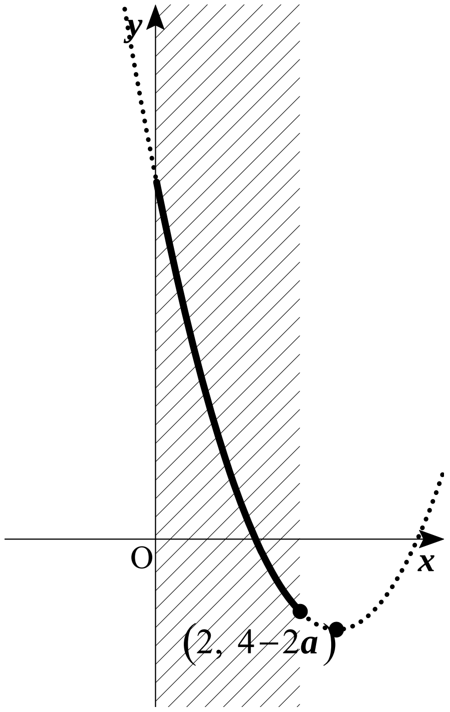
$f(a) = 2a - a^2$



（ⅲ）$2 \leqq a$の場合，

$f(x)$は$x = 2$で最小値をとるので，最小値mは

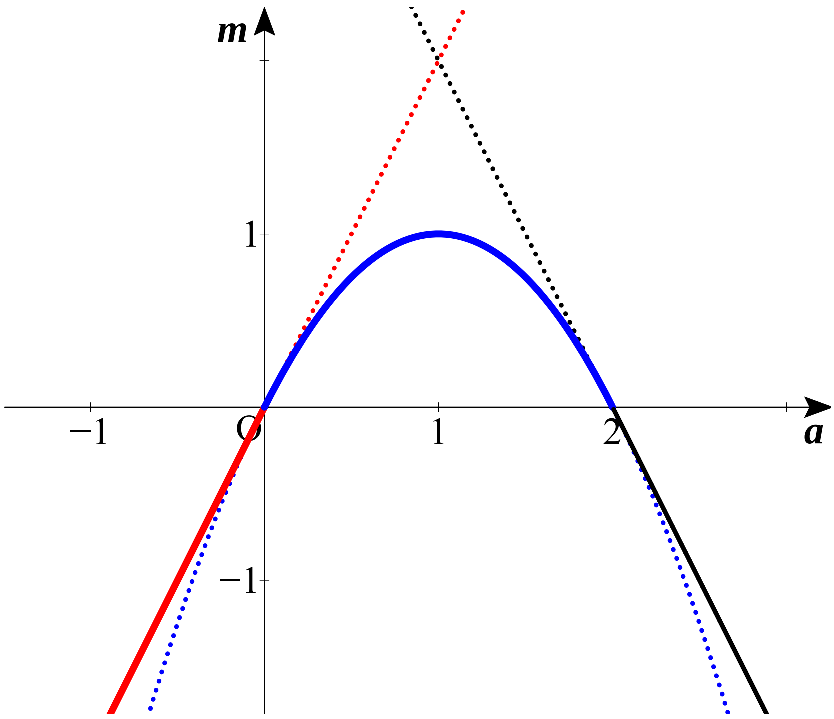
$f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2a + 2a = 4 - 2a$



問題 2

最小値mはaの関数となっている．

次のようなグラフを描くことができる．



図より$0 < a < 2$に最大値がある．

$m = 2a - a^2 = -(a^2 - 2a + 1) + 1 = -(a - 1)^2 + 1$

mは$a = 1$で最大値 1 をとる．

第 3 問

問題 1

∠C の二等分線と AB の交点 D は，AB を CA : CB に内分するので，

$$\mathrm{AD} : \mathrm{DB} = \mathrm{CA} : \mathrm{CB} = 6 : 10 = 3 : 5$$

AD の長さは，

$$\mathrm{AD} = \frac{3}{3+5}\mathrm{AB} = \frac{3}{8} \times 8 = 3$$

問題 2

E は内接円と CA の接点であるから，

$$\mathrm{OE} \perp \mathrm{CA}$$

同様に，

$$\mathrm{OF} \perp \mathrm{BC}$$

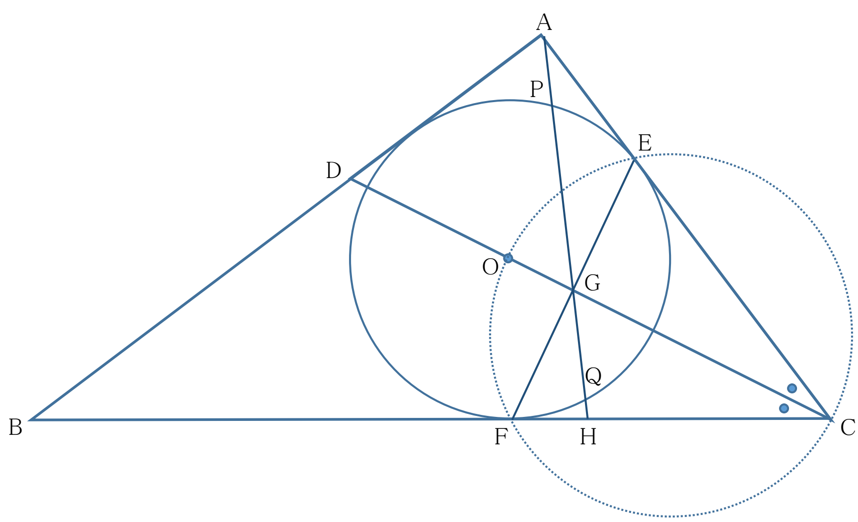
したがって，

$$\angle\mathrm{OEC} = \angle\mathrm{OFC} = 90°$$

四角形 OECF において，$\angle\mathrm{OEC}$と$\angle\mathrm{OFC}$は対角であり，

$$\angle\mathrm{OEC} + \angle\mathrm{OFC} = 180°$$

1 組の対角の和が 180° であることから，四角形 OECF は円に内接する．
つまり，4 点 O，E，C，F は 1 つの円周上にある．



問題 3

内接円の弦 EF，PQ において，方べきの定理より，

$$\mathrm{GE}\cdot\mathrm{GF}=\mathrm{GP}\cdot\mathrm{GQ} \qquad \cdots①$$

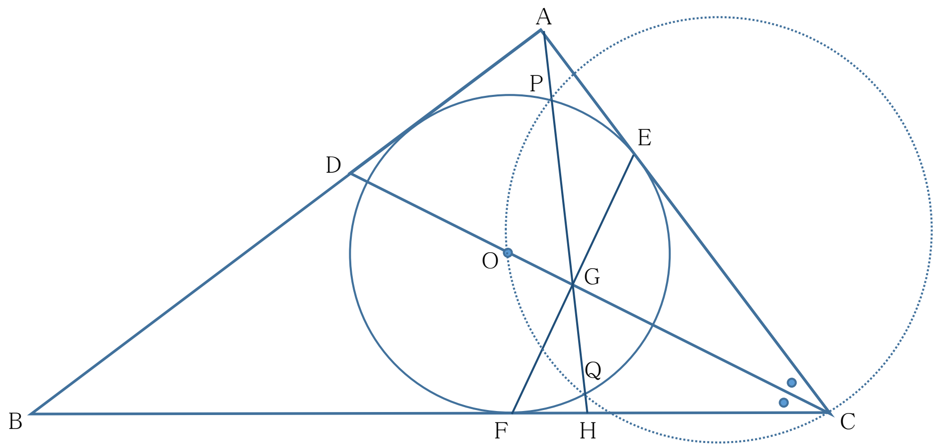
問題 2 で証明された円の弦 EF，OC において，方べきの定理より，

$$\mathrm{GE}\cdot\mathrm{GF}=\mathrm{GO}\cdot\mathrm{GC} \qquad \cdots②$$

①，②より，

$$\mathrm{GP}\cdot\mathrm{GQ}=\mathrm{GO}\cdot\mathrm{GC}$$

よって，方べきの定理の逆から，4 点 O，P，C，Q は 1 つの円周上にある．



第 4 問

問題 1

動点 X が題意を満たすのは，動点 X が A から出発して，B→A→B→A のように往復するか（$S_n = S_1 = \sqrt{3}/4$），C→G→C→G のように往復するか（$S_n = S_1 = 0$），G→C→G→C のように往復するか（$S_n = S_1 = 0$）に限られる．ゆえに

$$P_n = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

問題 2

動点 X が A, B, C を訪れるときは XG =1, 動点 X が G を訪れるときは XG＝0 である．よって確率 Q_n は 3 点 A, B, C すべてを少なくとも 1 回は訪れているが，G は 1 回も訪れていない確率である．

まず, G を 1 回も訪れない確率は$(2/3)^n$である．

次に，以下の各事象の確率を求める．

1. B と G いずれも 1 回も訪れないときの確率：
動点 X が A から出発して, C→A→C→A のように往復するときの確率なので，$(1/3)^n$.

2. C と G いずれも 1 回も訪れないときの確率：
動点 X が A から出発して, B→A→B→A のように往復するときの確率なので，$(1/3)^n$.

3. A と G いずれも 1 回も訪れないときの確率：
動点 X が A から出発して, B→C→B→C のように往復するか, C→B→C→B のように往復するときの確率なので，$2(1/3)^n$. ただし，条件より，最初にいる頂点 A は訪れた頂点として考えないことに注意する．

よって,

$$Q_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 4\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

$n \geqq 3$ のとき，$Q_n > P_n$を示すので,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4\left(\frac{1}{3}\right)^n > 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (\text{ただし} n \geqq 3)$$

すなわち,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n - 7\left(\frac{1}{3}\right)^n > 0 \quad (\text{ただし} n \geqq 3)$$

を示せばよい.

$n \geqq 3$ のとき, $K = (1/3)^n$とする. $K > 0$ に注意する.

このとき,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n - 7\left(\frac{1}{3}\right)^n = 2^n K - 7K \geqq 8K - 7K = K > 0.$$

以上より, 題意が示された.