

2017年度 前期

個別学力検査

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題冊子は計算用紙を含めて8ページあります。解答冊子には解答用紙7枚が綴られています。
3. 試験時間は90分間です。
4. すべての解答用紙の所定欄に受験番号を記入してください(氏名は記入しないでください)。
5. 解答は、解答に至る過程を含めて、すべて解答用紙に記入してください。
6. 問題冊子と解答冊子に印刷不鮮明や落丁などがある場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
7. 試験中に気分が悪くなったときは、手を挙げて監督者の指示に従ってください。
8. 問題冊子は試験終了後に持ち帰ってください。ただし、無断で複写、複製、転載などを行うことはできません。

個 別 学 力 検 査

数 学

第1問 (配点 25 点)

次の問いに答えよ.

問題 1

次の式を因数分解せよ.

$$2x^2y - 3x^2 + 4xy^2 - 12xy + 9x - 12y^2 + 18y$$

問題 2

40 人のうち 30 人を A グループ, 残りを B グループとし, 同じテストを受けてもらった. A グループの平均得点は 4 点, 分散は 1.6 だった. B グループの平均得点は 8 点, 分散は 2.4 だった.

- (1) 全体の平均値を求めよ.
- (2) 全体の分散を求めよ.

問題 3

次の式を簡単にせよ.

(1) $(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^3 - (\cos^6 \theta + \sin^6 \theta)$

(2) $\frac{2(\cos^6 \theta + \sin^6 \theta) + 1}{3(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)}$

(計 算 用 紙)

第2問 (配点25点)

a を定数として、次の関数

$$f(x) = x^2 - 2ax + 2a$$

を考える。ただし、定義域を $0 \leq x \leq 2$ とする。 $f(x)$ の最小値を m とする。

問題 1

m を a を用いて表せ。

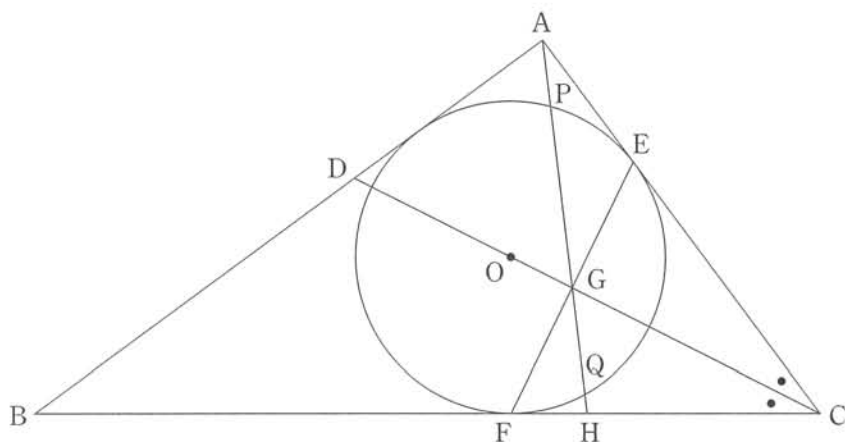
問題 2

m を最大にするような a の値、およびそのときの m の値を求めよ。

(計 算 用 紙)

第3問 (配点 25 点)

三角形 ABC において、 $\angle A = 90^\circ$ 、 $AB = 8$ 、 $BC = 10$ 、 $CA = 6$ とする。 $\angle C$ の二等分線と AB の交点を D とおく。 三角形 ABC に内接する円の中心を O とする。 O は CD 上にある。 内接円と CA の接点を E 、 BC との接点を F とする。 CD と EF の交点を G 、 AG を延長し BC と交わる点を H とする。 内接円と AH の交点のうち、 A に近い方から順に P 、 Q とする。



問題 1

AD の長さを求めよ。

問題 2

4 点 O 、 E 、 C 、 F が同一円周上にあることを示せ。

問題 3

4 点 O 、 P 、 C 、 Q が同一円周上にあることを示せ。

(計 算 用 紙)

第4問 (配点 25 点)

一辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形 ABC を考える. 重心を G とする. 動点 X は, 三角形 ABC の 3 つの頂点と重心 G の 4 つの点の間を移動する. 動点 X は最初に頂点 A に位置している. 1 回目の移動で他の 3 つの点のいずれかを等しい確率 $\frac{1}{3}$ で訪れる. 2 回目以降も同様とする. n 回目の移動後の動点 X の位置を観察する. n 回目の移動後に 3 点 X, C, G がつくる図形の面積を S_n とする. すなわち, X, C, G が三角形をつくるときは $S_n > 0$ であり, X, C, G が同一直線上にあるときは $S_n = 0$ である. ただし n は自然数とする.

問題 1

1 回目の移動でつくられる図形の面積 S_1 と S_n が常に同じになる確率 P_n を n を用いて表せ.

問題 2

$n \geq 3$ とする. 動点 X が常に $XG = 1$ を満たし, かつ 3 点 A, B, C すべてを少なくとも 1 回は訪れている確率を Q_n とする. $Q_n > P_n$ となることを示せ. ただし, 最初にいる頂点 A は訪れた頂点として考えない.

(計 算 用 紙)