数学の出題のねらい

数Ⅰ・Aに関する基本的な事項の習得度合いおよびその応用力をみることをねらいとしています．具体的には，基礎的な計算能力やデータの分析能力，関数とそのグラフについて考察する能力，定理を図形の計量に活用する能力，確率を事象の考察に活用する能力などを総合的にみることを意図した出題を心掛けました．

第 1 問

問題 1

$$\frac{1}{2+\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}-\frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}+\sqrt{5}-5\sqrt{6}+3\sqrt{7}$$
$$=\frac{2-\sqrt{5}}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}+\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{6})}{(\sqrt{5}+\sqrt{6})(\sqrt{5}-\sqrt{6})}-\frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{7})}{(\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{6}-\sqrt{7})}+\sqrt{5}-5\sqrt{6}+3\sqrt{7}$$
$$=-(2-\sqrt{5})-2(\sqrt{5}-\sqrt{6})+3(\sqrt{6}-\sqrt{7})+\sqrt{5}-5\sqrt{6}+3\sqrt{7}$$
$$=-2$$

問題 2

$$x^2-7x+10=(x-2)(x-5)\geqq 0$$

から，xの値の範囲は$x\leqq 2$，$x\geqq 5$.

次に

$$x^2-2x-1=0$$

の解が

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}=1\pm\sqrt{2}$$

となるので，

$$x^2-2x-1=\{x-(1+\sqrt{2})\}\{x-(1-\sqrt{2})\}<0$$

から，xの値の範囲は$1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$

以上をまとめると，xの値の範囲は$1-\sqrt{2}<x\leqq 2$となる．

問題 3

平均値が 5.2 より,

$$\frac{4+x+y+7+3}{5}=5.2$$

$x+y=12 \qquad \cdots$ ①

分散が 2.56 より,

$$\frac{4^2+x^2+y^2+7^2+3^2}{5}-(5.2)^2=2.56$$

$x^2+y^2=74 \qquad \cdots$ ②

①，②より

$2(x-5)(x-7)=0$

$x \leqq y$であるから，$x=5,\ y=7.$

第 2 問

問題 1

$f(x) > g(x)$なので，$f(x) - g(x) > 0$を考える．

$\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{2} - \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + 3a - \frac{1}{2}\right) > 0$ （注 1）

$x^2 - 3a - 2 > 0$

$h(x) = x^2 - 3a - 2$とする．

$h(x)$は下に凸の関数だから，$h(x) > 0$が成り立つためには，$D < 0$であればよい．

$D = -4(-3a - 2) < 0$

よって，$a < -\frac{2}{3}$ ．

（注 1） 本式を訂正しました．

訂正前： $\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{2}x^2 + x + 3a - \frac{1}{2}\right) > 0$

訂正後： $\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{2} - \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + 3a - \frac{1}{2}\right) > 0$

問題 2

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 3 \quad \cdots ①$

$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 3a - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 3a \quad \cdots ②$ （注 2）

①，②より，題意を満たすには，$-3 \leqq x \leqq 3$における$f(x)$の最大値が$g(x)$の最小値を下回ればよい．

①から$f(x)$の最大値は$x = 3$のとき得られる．

$f(3) = \frac{1}{2} \times 4^2 - 3 = 5$

②から$g(x)$の最小値は$x = -3$のとき得られる．

$g(-3) = -\frac{1}{2} \times (-4)^2 + 3a = -8 + 3a$

$f(x)$の最大値が$g(x)$の最小値を下回るので，

$5 < -8 + 3a$

$a > \frac{13}{3}$

（注 2） 解答例②式を訂正しました．（2019 年 2 月 15 日）

訂正前： $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 3a - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 3a \quad \cdots ②$

訂正後： $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 3a - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 3a \quad \cdots ②$

問題 3

$f(x)$と$g(x)$の交点を求める．

$$\frac{1}{2}x^2+x-\frac{5}{2}=\left(-\frac{1}{2}x^2+x+3a-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2-3a-2=0$$

$$x=\pm\sqrt{3a+2}$$

・ $x=\sqrt{3a+2}$ のとき， $f(x)=\frac{3}{2}a-\frac{3}{2}+\sqrt{3a+2}$

・ $x=-\sqrt{3a+2}$ のとき， $f(x)=\frac{3}{2}a-\frac{3}{2}-\sqrt{3a+2}$

よって, 交点 A および B は, $(\sqrt{3a+2}, \frac{3}{2}a-\frac{3}{2}+\sqrt{3a+2})$，$(-\sqrt{3a+2}, \frac{3}{2}a-\frac{3}{2}-\sqrt{3a+2})$ で与えられる．

ここで， $(\sqrt{3a+2}, \frac{3}{2}a-\frac{3}{2}-\sqrt{3a+2})$ を点 C とし， 辺 AB を斜辺とする直角三角形 ABC を考える．

辺 BC の長さ　　$\sqrt{3a+2}-(-\sqrt{3a+2})=2\sqrt{3a+2}$

辺 AC の長さ　　$\frac{3}{2}a-\frac{3}{2}+\sqrt{3a+2}-\left(\frac{3}{2}a-\frac{3}{2}-\sqrt{3a+2}\right)=2\sqrt{3a+2}$

つまり， 三角形 ABC は，直角二等辺三角形である．

したがって，辺の比は 1：1： $\sqrt{2}$ ．

線分 AB の長さは $4\sqrt{2}$ なので， $2\sqrt{3a+2}=4$.

よって $a=\frac{2}{3}$.

第 3 問

問題 1

正弦定理より，外接円の半径を R として次式が成り立つ.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

よって，$a:b:c=4:5:6$.

$k>0$ の定数として，$a=4k, b=5k, c=6k$ とおく.

余弦定理から

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(25+36-16)k^2}{60k^2}=\frac{3}{4}$$ となる.

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$$

$$\sin A=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$$

Aが三角形の角であることから，$\sin A>0$なので$\sin A=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$となる.

問題 2

三角形 ABC の面積を求める.

三角形 ABC の面積 $=\dfrac{1}{2}bc\sin A=15k^2\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ …①

内接円の半径を r として

三角形 ABC の面積 $=\dfrac{r}{2}(a+b+c)=\dfrac{15}{2}k\cdot r$ … ②

面積についての上の 2 つの式①，②から

$$r=\frac{\sqrt{7}}{2}k \qquad \cdots ③$$

また正弦定理から

$$2R=\frac{4k}{\frac{\sqrt{7}}{4}} \qquad \cdots ④$$

③，④から

$$r:R=\frac{\sqrt{7}}{2}:\frac{8}{\sqrt{7}}=7:16$$

第 4 問

問題 1

20 枚のカードのうち素数が書かれたカードは，2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 の 8 枚ある．

数字の和が 10 以下となるカードの組は次の 11 通りあり，

$(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,2,6),(1,2,7),(1,3,4),(1,3,5),(1,3,6),(1,4,5),(2,3,4),(2,3,5)$

この中で素数を 2 つ以上含む組は次の 6 通りある．

$(1,2,3),(1,2,5),(1,2,7),(1,3,5),(2,3,4),(2,3,5)$

それぞれの組について，3 人がカードを取り出す方法は 3! 通りある．

したがって，求める確率は，

$$\frac{6\times 3!}{{}_{20}\mathrm{P}_3}=\frac{1}{190}$$

問題 2

数字の和が 10 以下となる確率は，

$$\frac{11\times 3!}{{}_{20}\mathrm{P}_3}=\frac{11}{1140}$$

2 枚以上が素数であるという事象は，全員が素数を取り出す事象と 2 人が素数を取り出す事象の和事象であり，これらは互いに排反である．

全員が素数を取り出す確率は，

$$\frac{{}_{8}\mathrm{P}_3}{{}_{20}\mathrm{P}_3}=\frac{14}{285}$$

2 人が素数を取り出す場合，素数を取り出すのは A と B，B と C，C と A の 3 通りある．

2 人が素数を取り出す確率は，

$$\frac{3\times {}_{8}\mathrm{P}_2\times 12}{{}_{20}\mathrm{P}_3}=\frac{28}{95}$$

よって，2 枚以上が素数である確率は，

$$\frac{14}{285}+\frac{28}{95}=\frac{98}{285}$$

和が 10 以下，または 2 枚以上が素数である確率は，

$$\frac{11}{1140}+\frac{98}{285}-\frac{1}{190}=\frac{397}{1140}$$

問題 3

和が 10 以下，または 2 枚以上が素数であるという事象を S，B の取り出したカードが素数であるという事象を T とする．

事象$S \cap T$は，以下の 2 つの事象に分けられる．

a: 2 枚以上が素数，かつ B が素数を取り出す事象

b: 和が 10 以下，かつ B だけが素数を取り出す事象

これらは互いに排反である．

事象 a は，全員が素数を取り出す事象と，A と B または B と C が素数を取り出す事象の和事象であり，これらは互いに排反である．

事象 a の確率 P(a)は，

$$P(a) = \frac{{}_8P_3}{{}_{20}P_3} + \frac{2 \times {}_8P_2 \times 12}{{}_{20}P_3}$$

和が 10 以下のとき，1 枚だけが素数の組は問題 1 より 5 通りある．

B が素数を取り出すとすると，A と C が取り出す方法はそれぞれ 2 通りある．

事象 b の確率 P(b)は，

$$P(b) = \frac{5 \times 2}{{}_{20}P_3}$$

よって，事象$S \cap T$の確率は，

$$P(S \cap T) = P(a) + P(b) = \frac{{}_8P_3}{{}_{20}P_3} + \frac{2 \times {}_8P_2 \times 12}{{}_{20}P_3} + \frac{5 \times 2}{{}_{20}P_3} = \frac{169}{684}$$

また問題 2 より，

$$P(S) = \frac{397}{1140}$$

したがって，求める確率は，

$$P_S(T) = \frac{P(S \cap T)}{P(S)} = \frac{1690}{2382} = \frac{845}{1191}$$